Colle du 30/03 - Sujet 1
Applications linéaires

Question de cours. Démontrer que l'image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \mapsto & (2a-b+3c)\,X^2+(c-b)\,X+a+2b-c \end{array}$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \\ n = 2\operatorname{rg}(f) \end{cases}$.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 30/03 - Sujet 2
Applications linéaires

Question de cours. Montrer que l'image d'une base est libre si et seulement si...

Exercice 1. Soient $n \geqslant 3$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $P \in E$, $\varphi(P) = \left(X^2-X+1\right)P(-1) + \left(X^3-X\right)P(0) + \left(X^3+X^2+1\right)P(1)$.

1. Vérifier que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
2. Calculer l'image de X^3+X.
3. Déterminer le noyau et l'image de φ. A-t-on $\operatorname{Im}(\varphi) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi) = E$.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 + 2u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.
2. Montrer que l'endomorphisme v induit par u sur $\operatorname{Im}(u)$ est un automorphisme.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 30/03 - Sujet 3
Applications linéaires

Question de cours. Démontrer le théorème du rang.

Exercice 1. Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (1-X)\,P'(2)+P(X) \end{array}$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer le noyau et l'image de φ. A-t-on $\operatorname{Im}(\varphi) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel et $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$. Montrer que

$$f \circ g \in \operatorname{GL}(E) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ surjective} \\ g \text{ injective} \\ E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(g) \end{cases}.$$